Test 4 – Sujet A

NOM et PRÉNOM :

La calculatrice est interdite et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1

(1) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son domaine de définition et calculer sa dérivée.

$$\textbf{(a)}\ f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 5x + 6}, \qquad \textbf{(b)}\ g(y) = \sqrt{\ln(y)}, \qquad \textbf{(c)}\ h(t) = \ln\left(\frac{e^{3t}}{\sqrt{t^3 + 2t^2 + t}}\right).$$

(2) Résoudre les inéquations suivantes,

$$\textbf{(a)}\ f(x) < 3, \qquad \textbf{(b)}\ 2g(x)\cos(\pi x) \geq g(x),$$

où f et g sont les fonctions introduites dans les questions **(1a)** et **(1b)**.

Test 4 – Sujet A

NOM et PRÉNOM (lisibles) :

Résolution des exercices

Test 4 – Sujet A **Corrigé du test**

Exercice 2

(1a) La quantité $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2-5x+6 \neq 0$. Le polynôme x^2-5x+6 a une racine «évidente» $x=2$ et se factorise donc en $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Par conséquent, le domaine de définition de f est

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}\backslash\{2,3\}}.$$

En utilisant la règle de dérivation d'un quotient on obtient

$$f'(x) = \frac{6x(x^2-5x+6)-3x^2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{-15x^2+36x}{(x^2-5x+6)^2} = \boxed{-\frac{3x(5x-12)}{(x-2)^2(x-3)^2}}.$$

(1b) Pour que la quantité $g(y)$ soit définie il faut et il suffit que $\ln(y) \geq 0$. Par conséquent, le domaine de définition de g est

$$\boxed{D_g = [1,+\infty[}.$$

Pour la dérivée, on obtient

$$g'(y) = \frac{1/y}{2\sqrt{\ln(y)}} = \boxed{\frac{1}{2y\sqrt{\ln(y)}}}.$$

(1c) Puisque pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{3t} > 0$ et $t^3+2t^2+t = t(t+1)^2$, $h(t)$ est définie si et seulement si $t > 0$. Ainsi

$$\boxed{D_h = \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[}.$$

Avant de calculer la dérivée de h on peut simplifier son expression grâce aux propriétés du logarithme. En effet,

$$h(t) = 3t - \frac{1}{2}\ln(t(t+1)^2) = 3t - \frac{1}{2}\ln(t) - \ln(t+1).$$

Il suit

$$h'(t) = 3 - \frac{1}{2t} - \frac{1}{t+1} = \frac{6t(t+1)-(t+1)-2t}{2t(t+1)} = \boxed{\frac{6t^2+3t-1}{2t(t+1)}}$$

(2a)

$$f(x) < 3 \iff \frac{3x^2-3(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6} < 0 \iff \frac{3(5x-6)}{(x-2)(x-3)} < 0$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (qui s'obtient par un tableau de signes) est

$$\boxed{S =]-\infty, 6/5[\cup]2,3[}$$

.

(2b) Puisque g est une fonction positive ou nulle, l'inégalité est équivalente à

$$\begin{cases} \cos(\pi x) \geq \dfrac{1}{2} \\ x \in D_g \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \geq \pi x \geq -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ pour un certain entier } k \\ x \geq 1 \end{cases}$$

ce qui donne comme ensemble de solutions

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[-\frac{1}{3}+2k, \frac{1}{3}+2k\right]} = \left[\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{11}{3},\frac{13}{3}\right] \cup \left[\frac{17}{3},\frac{19}{3}\right] \cup \ldots$$